証明論の教科書の中で超準解析を書くとすると (ブール代数値の解析学と超準解析)

AUTHOR(S):

本橋, 信義

数理解析研究所講究録
336巻 1978年 135-149

証明論の教科書の中で超準解析を書くとすると

筑波大 数学系　　本橋信義

超準解析を証明論の枠内で（すなわち，模型論を用いないで）考察し，"Non-standard Theory" と "Standard Theory" の間の証明論的な相互関係を調べたい。

§1. 証明論よりの準備.

L, L', … で第一階の述語論理を，$PC(L)$, $Fun(L)$, $Con(L)$ でそれぞれLの述語記号の全体，Lの関数記号の全体，Lの個体定数記号の全体をあらわすものとする。但し，等号$=$は$PC(L)$には入らない（論理記号として扱う）ことに注意されたい。第一階の述語論理L, L' とLの中のTheory T，およびLの中の指定されたn個の自由変数 $\bar{p}=\langle p_1,\cdots,p_n\rangle$ が与えられたとき，

$$I_{\bar{p}} = \left\langle C(\bar{p}),\ V(\bar{p},x),\ \{F_P(\bar{p},\bar{x})\}_{P\in PC(L')},\ \{t_f(\bar{p},\bar{x})\}_{f\in Fun(L')},\ \{t_c(\bar{p})\}_{c\in Con(L')} \right\rangle$$

が 論理 L' の Theory T の中への (n-ary) parametrical interpretation であるとは：

$C(\bar{p})$ は L の n-ary formula ,

$\nabla(\bar{p}, x)$ は L の $(n+1)$-ary formula ,

$F_P(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)$-ary formula （$P \in PC(L')$ が m-ary のとき），

$t_f(\bar{p}, \bar{x})$ は L の $(n+m)$-ary term （$f \in Fun(L')$ が m-ary のとき），

$t_c(\bar{p})$ は L の n-ary term （$c \in Con(L')$），

で，

$$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C(\bar{p}) ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C(\bar{p}) \supset \exists x \nabla(\bar{p}, x)] ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, \forall \bar{x}\, [C(\bar{p}) \wedge \nabla(\bar{p}, \bar{x}) . \supset \nabla(\bar{p}, t_f(\bar{p}, \bar{x}))] \quad (f \in Fun(L')) ,$$

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\, [C(\bar{p}) . \supset \nabla(\bar{p}, t_c(\bar{p}))] \quad (c \in Con(L'))$$

がなり立つこととする，ただし，$\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ のとき，$\nabla(\bar{p}, \bar{x})$ は $\nabla(\bar{p}, x_1) \wedge \nabla(\bar{p}, x_2) \wedge \ldots \wedge \nabla(\bar{p}, x_m)$ をあらわすものとする。

I が L' の T の中への parametrical interpretation のとき，上記の C, ∇, $F_P, \ldots$, $t_f, \ldots$, $t_c, \ldots$ をそれぞれ C_I, ∇_I, $P_I, \ldots$, $f_I, \ldots$, $c_I, \ldots$ であらわし，

$$I_{\bar{p}} = \langle C_I(\bar{p}), \nabla_I(\bar{p}, x), \{P_I(\bar{p}, \bar{x})\}_{P \in PC(L')}, \{f_I(\bar{p}, \bar{x})\}_{f \in Fun(L')}, \{c_I(\bar{p})\}_{c \in Con(L')} \rangle$$

と表示する。

$I_{\bar{p}}$ が L' の T の中への p. interpretation のとき，L' の各 term t，各 formula φ において $I_{\bar{p}}(t)$ および $I_{\bar{p}}(\varphi)$ を次のように定

義する：

$$I_{\bar p}(x) = x \quad (x \text{ は free variable})$$

$$I_{\bar p}(c) = c_I(\bar p) \quad (c \in Con(L'))$$

$$I_{\bar p}(f(t_1,\dots,t_n)) = f_I(\bar p, I_{\bar p}(t_1),\dots, I_{\bar p}(t_n)) \quad (f \in Fun(L'))$$

$$I_{\bar p}(t_1 \doteq t_2) = I_{\bar p}(t_1) \doteq I_{\bar p}(t_2)$$

$$I_{\bar p}(P(t_1,\dots,t_n)) = P_I(\bar p, I_{\bar p}(t_1),\dots, I_{\bar p}(t_n)) \quad (P \in PC(L'))$$

$$I_{\bar p}(\neg\varphi) = \neg I_{\bar p}(\varphi)$$

$$I_{\bar p}(\varphi \wedge \psi) = I_{\bar p}(\varphi) \wedge I_{\bar p}(\psi)$$

$$I_{\bar p}(\varphi \vee \psi) = I_{\bar p}(\varphi) \vee I_{\bar p}(\psi)$$

$$I_{\bar p}(\varphi \supset \psi) = I_{\bar p}(\varphi) \supset I_{\bar p}(\psi)$$

$$I_{\bar p}(\exists x\, \varphi(x)) = \exists x (V(\bar p, x) \wedge I_{\bar p}(\varphi(x)))$$

$$I_{\bar p}(\forall x\, \varphi(x)) = \forall x (V(\bar p, x) \supset I_{\bar p}(\varphi(x))) \quad .$$

すると，

<u>Corollary</u> L' の $\bar x$-formula $\varphi(\bar x)$ について，

$$\vdash_{L'} \varphi(\bar x) \Rightarrow T \vdash_L \forall \bar p\, \forall \bar x\, [C_I(\bar p) \wedge V_I(\bar p, \bar x) . \supset I_{\bar p}(\varphi(\bar x))]$$

が成り立つことは明らかである。

特に，L が L' の sublogic ($L \subset L'$) のときに，L' の T の中への p. interpretation <u>I が L を保存する</u>とは：

(i) $V_I(\bar p, x)$ は $x \doteq x$， (ii) $P_I(\bar p, \bar x) = P(\bar x)$ if $P \in PC(L)$，

(iii) $f_I(\bar p, \bar x) = f(\bar x)$ if $f \in Fun(L)$， (iv) $c_I(\bar p) = c$ if $c \in Con(L)$

が成り立つこととする。

IがLを保存するときには，Lの任意の$\vec{x}$-formula $\varphi(\vec{x})$について，

$$T \vdash_L \forall \vec{p}\,[C_I(\vec{p}).\supset I_{\vec{p}}(\varphi(\vec{x}))\equiv\varphi(\vec{x})]$$

が成り立つことに注意されたい。

IがL'のTの中への p. interpretation のとき，L'の sentence φ が <u>I-valid in T</u> であるとは $T \vdash \forall \vec{p}\,[C_I(\vec{p}) \supset I_{\vec{p}}(\varphi)]$ が成り立つこととする。以上の概念を用いて我々は次の定義を得る。

<u>Definition</u>. L, L′は第一階の述語論理で $L \subset L'$, T, T'はそれぞれL, L′の中の Theory で $T \subset T'$ となっているものとする。<u>T'がLを保存して局所的にTにうめこめる</u>とは，T'の任意の有限個の公理$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$に対して，Lを保存するL′のTの中への parametrical interpretation Iで，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$がすべて$I$-valid in Tになるものが存在することである。

この定義の下で，次の基本的な定理が得られる。

<u>Conservation Theorem</u>. T'がLを保存して局所的にTにうめこめるならば，T'はTの conservation extension である。

(証明). Lの sentence φについて，$T' \vdash_{L'} \varphi$ を仮定して $T \vdash_L \varphi$ を示せばよい。$T' \vdash_{L'} \varphi$ を仮定すると compactness Theorem によりT'の有限個の公理$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$が存在して，

$$\vdash_{L'} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n . \supset \varphi$$

が成り立つ。仮定から，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$が$I$-valid in TになるようなLを保存するL′のTの中への parametrical interpretation が

取れる。3頁の Corollary から、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\,[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n . \supset \varphi)].$$

$I_{\bar{p}}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \supset \varphi)$ は定義から $I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_n) . \supset I_{\bar{p}}(\varphi)$ であるから、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\,[C_I(\bar{p}) \supset (I_{\bar{p}}(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge I_{\bar{p}}(\varphi_n) . \supset I_{\bar{p}}(\varphi))].$$

所が $T \vdash_L \forall \bar{p}\,[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\varphi_i)]$ $(i=1,\ldots,p)$ で $T \vdash_L \forall \bar{p}\,[C_I(\bar{p}) \supset \varphi \equiv I_{\bar{p}}(\varphi)]$ であるから、

$$T \vdash_L \forall \bar{p}\,[C_I(\bar{p}) \supset \varphi]$$

φ に $\bar{p}$ が出てこないから、

$$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C_I(\bar{p}) \supset \varphi$$

一方、$T \vdash_L \exists \bar{p}\, C_I(\bar{p})$ だから、ここから

$T \vdash_L \varphi$ を得る (証明終り)

論理 L で formulate されている standard theory T に対して、L を拡張して得られる論理 L′ の中での T の拡張である non-standard theory T′ を考え、上の Conservation Theorem を用いて、T′ が T の conservative extension になっていることを示したい。以下の節でこれを実行していく。

$\boxed{\S 2.}$ first order logic with membership.

特定の1項述語記号 $S(*)$ と2項述語記号 $*\in*$ を固定し、"S" と "∈" をもった第一階の述語論理のみを考える。"S" と "∈" を用いて通常の集合論的概念は first order logic の中の

formula としてほとんど表現されているものとする：

例　$x \neq \phi$ は $S(x) \wedge \exists y (y \in x)$

$x \subset y$ は $S(x) \wedge S(y) \wedge \forall z (z \in x \supset z \in y)$

⋮

etc.

各 logic L において，"S" を "set"，"∈" を "membership" と考えて書かれているある種の集合論の公理系 $\Sigma(L)$ が次の条件 [I] および [II] をみたすように対応させられているものとする。

[I]，$\Sigma(L) \subset \Sigma(L')$ if $L \subset L'$.

[II]．$L \subset L'$ のとき，$\Sigma(L')$ の各公理の L への reduction はすべて $\Sigma(L)$ で証明可能である；

[注 L' の formula φ において φ の L への reduction とは，φ の中に出てくる，L に入っていない predicate symbol，function symbol および individual constant symbol をそれぞれ，L の formula および terms でおきかえて得られる L の formula のことである。]

すると

Corollary．$L \subset L'$ のとき $\Sigma(L')$ は $\Sigma(L)$ の conservative extension である．

[証明]．φ は L の sentence で $\Sigma(L') \vdash_{L'} \varphi$ を仮定する．

compactness theorem から、$\Sigma(L')$ の有限個の公理 $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ が取れて、$\vdash_{L'} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \supset \varphi$ が成り立つ。$\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi$ の中の L にない predicate symbols, function symbols, constant symbols をすべて、Lの適当な formula 又は terms で一せいにおきかえて得られる formulas を $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_p, \hat{\varphi}$ とすると $\hat{\varphi} = \varphi$ であり、

$$\vdash_{L'} \hat{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p \supset \varphi$$

が成り立つ。ここから $\vdash_L \hat{\varphi}_1 \wedge \hat{\varphi}_2 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p \supset \varphi$.

一方 (II) より $\Sigma(L) \vdash_L \hat{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \hat{\varphi}_p$ だから

$\Sigma(L) \vdash_L \varphi$ が得られる。（証明終り）

注意. $\Sigma(L)$ として L での Zermelo Fraenkel の集合論を取れば、上記の(I),(II)が成り立つ。

§3 Universe の付加.

論理 L に新しい constant symbol U を付加して得られる論理 $L(U)$ を考える。各 L と U において、$L(U)$ での公理系 $Ax(L,U)$ を次の条件[III],[IV],[V]をみたすように存在させる。（注意, $Ax(L,U)$ は U が L の universe をあらわすことを表現している。）.

[III] $\Sigma(L(U)), Ax(L,U) \vdash \exists x(x \in U) \wedge S(U)$

$\Sigma(L(U)), Ax(L,U) \vdash \forall \vec{x}[\vec{x} \in U \supset f(\vec{x}) \in U]$ $(f \in Fun(L))$

$\Sigma(L(U)), Ax(L,U) \vdash c \in U$ $(c \in Con(L))$

[IV] $\Sigma(L(U)), Ax(L,U) \vdash \varphi^U$ for any $\varphi \in \Sigma(L)$.

[V]. $Ax(L, U)$ の各元 $\psi_1(U), \ldots, \psi_s(U)$ と L の各 sentence φ について,

$$\Sigma(L) \vdash \exists x(\psi_1(x) \wedge \cdots \wedge \psi_s(x) \wedge \varphi^x \equiv \varphi),$$

ここで φ^x は φ の x による relativization とする。

[I]〜[V] の下で我々は次の定理を得る。

<u>Theorem 1.</u> L の任意の sentence φ について

$$\Sigma(L) \vdash_L \varphi \iff \Sigma(L(U)), Ax(L, U) \vdash_{L(U)} \varphi^U$$

[証明] (⇒) $\Sigma(L) \vdash \varphi$ を仮定する。すると $\Sigma(L)$ の有限個の元 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ で $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_L \varphi$ となるものが取れる。

Relativization の一般論より

$$\exists x(x \in U), \{\forall x[x \in U \supset f(x) \in U]\}_{f \in Fn(L)}, \{c \in U\}_{c \in Con(L)},$$

$$\varphi_1^U, \ldots, \varphi_n^U \vdash_{L(U)} \varphi^U$$

ここで [III], [IV] より $\Sigma(L(U)), Ax(L, U) \vdash_{L(U)} \varphi^U$.

(⇐) $\Sigma(L(U)), Ax(L, U) \vdash_{L(U)} \varphi^U$ を仮定すると [I] より $\Sigma(L(U))$ の元 $\varphi_1(U), \ldots, \varphi_k(U)$ と $Ax(L, U)$ の元 $\psi_1(U), \ldots, \psi_s(U)$ で

$$\Sigma(L), \varphi_1(U), \ldots, \varphi_k(U), \psi_1(U), \ldots, \psi_s(U) \vdash_{L(U)} \varphi^U$$

のなりたつものが取れる。U を L の free variable a で一せいにおきかえて,

$$\Sigma(L), \varphi_1(a), \ldots, \varphi_k(a), \psi_1(a), \ldots, \psi_s(a) \vdash_L \varphi^a$$

が得られる。所が [II] より

$$\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a)\wedge\cdots\wedge\psi_\ell(a)$$

だから, $\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a)\wedge\cdots\wedge\psi_\ell(a).\supset\varphi^a$ が成り立つ。

よって $\Sigma(L) \vdash_L \psi_1(a)\wedge\cdots\wedge\psi_\ell(a)\wedge\varphi^a\equiv\varphi.\supset\varphi$ を得る.

$\Sigma(L)$, φ に a が出てこないから

$$\Sigma(L) \vdash_L \exists x(\psi_1(x)\wedge\cdots\wedge\psi_\ell(x)\wedge\varphi^x\equiv\varphi)\supset\varphi$$

従って [V] より $\Sigma(L)\vdash_L\varphi$ を得る. (証明終り)

注意. Theorem 1 において, φ としては bounded formula のみを考えるのだが, 条件 [IV] の代りに

$$[\mathrm{IV}]' \quad Ax(L,\sigma) \vdash_{L(\sigma)} \forall x\forall y[x\in y\wedge y\in\sigma.\supset x\in\sigma]$$

を用いる方がよい。つまり, [I], [II], [III], [IV]', [V] の下で, φ が bounded sentence のとき.

$$\Sigma(L)\vdash\varphi \iff \Sigma(L(\sigma)),\ Ax(L,\sigma)\vdash\varphi^\sigma$$

∵) ($\Leftarrow$) は上の証明と同じ

($\Rightarrow$) は $\Sigma(L)\vdash\varphi$ より $\Sigma(L(\sigma))\vdash\varphi$

一方 $Ax(L,\sigma)\vdash\varphi\equiv\varphi^\sigma$ だから

$$\Sigma(L(\sigma)),\ Ax(L,\sigma)\vdash\varphi^\sigma \qquad (\text{Q.E.D.})$$

通常の数学の命題は, "∈" を含んだ体系では必ず bounded formula で表現されると考えられるので, [IV] より [IV]' の方が natural であると考えられる。

$\boxed{\S 4}$ Non-Standard Theory.

$L(V)$の拡張になっている first order logic L^* を取り, L^*の中での Theory Nt が次の条件[VI]をみたしているとする.

[VI] Nt は $L(V)$を保存して局所的に $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ にうめこめる

すると Conservation Theorem から次の定理が得られる.

<u>Theorem 2</u>　$\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,V)$ は $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ の conservative extension である.

(証明) Conservation theorem により $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,V)$ が $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ の中に $L(V)$ を保存して局所的にうめこめることを示せばよい。

$\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,V)$ の中の有限個の formulas $\varphi_1,\dots,\varphi_l, \sigma_1,\dots,\sigma_p, \psi_1,\dots,\psi_q$ を $\varphi_i \in \Sigma(L^*)$, $\sigma_j \in Nt$, $\psi_k \in Ax(L,V)$ となるように取る。[VI]より $\sigma_1,\dots,\sigma_p$ が I-valid in $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ となるような $L(V)$を保存する L^* の $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ の中への parametrical interpretation I が取れる. $\psi_1,\dots,\psi_q$ は $L(V)$の sentences で I は $L(V)$を保存するから,

$$\Sigma(L(V)), Ax(L,V) \vdash \forall \bar{p}[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\psi_k) \equiv \psi_k] \quad (k=1,\dots,q)$$

でしかも　$\Sigma(L(V)), Ax(L,V) \vdash \psi_k \quad (k=1,\dots,q)$

よって　$\Sigma(L(V)), Ax(L,V) \vdash \forall \bar{p}[C_I(\bar{p}) \supset I_{\bar{p}}(\psi_k)], \quad (k=1,\dots,q)$

すなわち $\psi_1,\dots,\psi_q$ はすべて I-valid in $\Sigma(L(V)), Ax(L,V)$ である

また I が L(σ) を保存することから $I_p(\varphi_1), \ldots, I_p(\varphi_\ell)$ は
~~[illegible]~~ それぞれ $\varphi_1 \ldots \varphi_\ell$ の L(σ) の中の reduction $\hat{\varphi}_1 \ldots \hat{\varphi}_\ell$ に
等値になる。従って [II] より

$$\Sigma(L(\sigma)), Ax(L.\sigma) \vdash I_p(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge I_p(\varphi_\ell)$$

従って $\varphi_1 \ldots \varphi_\ell$ も I-valid in $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L.\sigma)$ である。

以上から $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L.\sigma)$ は $\Sigma(L(\sigma)), Ax(L.\sigma)$ の中に L(σ) を保存して局所的にうめこめることになる (証明終り)

Theorem 1 と Theorem 2 を用いて ~~我々~~ は non-standard theory と standard theory の間の関係を次のように表現することが出来る。

logic L で formulate された theory T を考える。T には set theory が付加されていると考えるので、standard theory T の公理は正確には $\Sigma(L), T$ と表現できる。この standard theory $\Sigma(L), T$ の non-standard theory としては $\Sigma(L^*), Nt, Ax(L,\sigma), T^\sigma$ を考える。このとき [I]〜[III] のもとでは Theorem 1 と Theorem 2 より、L の任意の sentence φ について

$$\Sigma(L), T \vdash_L \varphi$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Sigma(L^*), Nt, Ax(L.\sigma), T^\sigma \vdash_{L^*} \varphi^\sigma$$

が成り立つことになる。

我々は 個々の具体的な T と、それを扱う目的によって 都合の

よい Nt を取って議論すればよい。その例を1つあげて、この話を終りにする。

[例] Σ(L) として L で formulate された Zermelo Fraenkel の集合論 (axiom of choice を入れる) を取る。この Σ(L) について [I] [II] が成り立つことは明らか。また Ax(L, σ) は [III], [II] [IV] [V] が成り立つように取られているものとする。

論理 L の各 predicate symbol P に対して同じ変数の個数をもつ新しい predicate symbol P^* を用意し、$L^* = L(\sigma) \cup \{P^*\}_{P \in PC(L)}$ とする。L(σ) の各 formula φ に対してその中の P … を P^* … でおきかえて得られる formula を φ^* であらわすことにする。

L の formula $\varphi(u, v, \bar{x}, y)$ に対して、

$$Lsa(\varphi)(y, \bar{x}) \text{ は } \forall z \in P_\omega(y)\, \exists v \in \sigma\, \forall u \in z\, \varphi^\sigma(u, v, \bar{x}, y)$$

$$Gsa(\varphi)(y, \bar{x}) \text{ は } \exists v \in^* \sigma\, \forall u \in y\, (\varphi^\sigma(u, v, \bar{x}, y))^*$$

とする。但し、ここで $P_\omega(y)$ は y の finite subset の全体をあらわす term とする。Nt としては、次の sentences 全体とする。

$$\left\{\begin{array}{l}
\exists z\,(S(z) \wedge \forall x\,(x \in^* \sigma \equiv x \in z)) \\
\forall x\, \forall y\,(x \in^* \sigma \wedge y \in^* x . \supset y \in^* \sigma) \\
\forall x\,(x \in \sigma \supset x \in^* \sigma) \\
\forall \bar{x}\,[\bar{x} \in \sigma \supset \varphi^\sigma(\bar{x}) \equiv (\varphi^\sigma(\bar{x}))^*] \text{ for any formula } \varphi(\bar{x}) \text{ in } L, \\
\forall \bar{x}\, \forall y\,[\bar{x} \in \sigma \wedge y \in \sigma \wedge Lsa(\varphi)(y, \bar{x}) . \supset Gsa(\varphi)(y, \bar{x})] \text{ for} \\
\qquad \text{any formula } \varphi(u, v, \bar{x}, y) \text{ in } L.
\end{array}\right.$$

するに通常の "ultrapower" を formal に扱うことにより (四)が成り立つことが示せる. 以下. その概略を説明しよう.

話を簡単にするために, L には関数記号と述語記号は入っていないものとし, $\Sigma(L(\sigma))$ の中では comprehension operator を自由に使って, $P(a)$ (a の power set), $P_\omega(a)$ (a の finite subset の全体) といった term が省略記号として扱えるようにしておく.

以下. notation は通常の公理的集合論のそれに従うものとして, $L(\sigma)$ での次のような terms 及び formula を考える.

$C(a)$; "a は σ 上の regular ultrafilter" i.e. a は $P_\omega(\sigma)$ 上の ultrafilter で各 $i \in \sigma$ において $\hat{i} \in a$ となる, ここで $\hat{i} = \{s \in P_\omega(\sigma) \mid i \in s\}$.

$eq(a, x, y)$; $\exists u \in a \, \forall i \in u \, (x'i = y'i)$

$V(a, x)$; $x \subset {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \wedge \exists u \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \, \forall v \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \, (v \in x \equiv eq(a, u, v))$

$j(a, x) = \{v \in {}^{P_\omega(\sigma)}P(\sigma) \mid \exists u \in a \, \forall i \in u \, (v'i = x)\}$

とすると

$$\Sigma(L(\sigma)) \vdash \forall a \forall x \, [C(a) \wedge x \in P(\sigma) . \supset V(a, j(a, x))]$$

$$\Sigma(L(\sigma)) \vdash \text{“} j \text{ は } P(\sigma) \text{ から } V(a, *) \text{ への injection”}$$

が成り立つ。次に $L(\sigma)$ の各 formula $\varphi(\bar{x})$ において

$$\tilde{\varphi}(a, \bar{x}) = \exists \bar{y} \in \bar{x} \, \exists u \in a \, \forall i \in u \, (\varphi(\bar{y}'i))$$

と定義する. そこで

$$J = \langle C(a), V(a, x), \{\tilde{E}(a, \bar{x})\}_{E \in P(L)}, \{j(a, \sigma)\} \rangle$$

とすると J は $L(\bar\sigma)$ の $\Sigma(L(\bar\sigma))$, $Ax(L.\sigma)$ の Ψ への parametrical interpretation であり この J について，次の Itô の定理が成り立つ。

Theorem (Itô). L の任意の formula $\varphi(\bar{x})$ について

$$\Sigma(L(\bar\sigma)),\ Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x}\,[\,C(a) \wedge \bar{x}\ \hat{\in}_a\ j(a.\sigma).\supset J_a(\varphi^{\sigma}(\bar{x})) \equiv \widetilde{\varphi^{\sigma}}(a.\bar{x})\,]$$

ここから

Corollary 1 L の任意の formula $\varphi(\bar{x})$ について

$$\Sigma(L(\bar\sigma)),\ Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x}\,[\,C(a) \wedge \bar{x} \in \sigma.\supset J_a(\varphi^{\sigma}(j(a.\bar{x}))) \equiv \varphi^{\sigma}(\bar{x})\,].$$

特に φ が sentence のときは.

$$\Sigma(L(\bar\sigma)),\ Ax(L.\sigma) \vdash \forall a\,[\,C(a) \supset J_a(\varphi^{\sigma}) \equiv \varphi^{\sigma}\,].$$

Corollary 2 L の formula $\varphi(u.v.\bar{x}, y)$ について.

$$\Sigma(L(\bar\sigma)),\ Ax(L.\sigma) \vdash \forall a \forall \bar{x} \forall y\,[\,C(a) \wedge \bar{x} \in \sigma \wedge y \in \sigma \wedge Lsa(\varphi)(y.\bar{x}).\supset.\exists v(V(a.v) \wedge v\ \hat{\in}_a\ j(a,\sigma) \wedge \forall u \in y\ J_a(\varphi^{\sigma}(j(a,u), v, j(a,\bar{x}), j(a.y))))\,]$$

そこで， L^* の $\Sigma(L(\bar\sigma))$, $Ax(L.\sigma)$ への parametrical interpretation I を次のように定める.

$$C_I(a,b,p) \doteqdot C(a) \wedge P(\sigma) \subset b \wedge \exists c(S(c) \wedge \forall x(x \in c \equiv V(a.x)) \wedge (p : b \xrightarrow{bi} c) \wedge \forall x \in P(\sigma)(j(a.x) = p'x).$$

$$V_I(a.\cancel{b}\,p.x) = \text{“}x \doteq x\text{”}$$

$$P_I(a.b,p.\bar{x}) = P(\bar{x}) \qquad (P \in PC(L))$$

$\underline{P}_I^*(a.b.p.\bar{x})$ は $\bar{x} \in b \wedge \hat{P}(a, p(\bar{x}))$ $(P \in P(L))$,

$U_I(a.b.p)$ は "U"

$(p(\bar{x})$ は $p'x_1, \ldots, p'x_n)$

とすると この I が $L(U)$ を保存する M の $\Sigma(L(\theta))$., $A_x(L, U)$ の中への parametrical interpretation になる. 従って (VI) が この M については成り立つことになる.